المحاضرة السادسة   / /

المسار path : مسلك لا يحتوي على رؤوس متكررة ، نرمز له بالرمز P_n

n - عدد الرؤوس

• عدد الأضلاع تساوي عدد الرؤوس مطروح منها واحد.

n=1 P_1

n=2 P_2 بيان تام ومنتظم

n=3 P_3 بيان غير تام وغير منتظم.

n=4 P_4

n=5 P_5

خواص المسار P_n :

1. عدد الأضلاع أصغر من عدد الرؤوس بواحد.
2. درجة الرؤوس عند الأطراف تساوي الواحد.
3. إذا n>2 يكون البيان غير تام وغير منتظم
4. طول المسار يساوي عدد الرؤوس مطروحاً منه واحد.

مثال :

G

P_n هو مسار بداية الرأس u ونهايته v ويمكن الوصول من الرأس u إلى الرأس v في هذا البيان باتباع أكثر من مسار

$P_n : u \to v$

بعض الطرق:

1- يمكن اتباع المسار من u إلى v مباشرة.

2- يمكن اتباع المسار من u إلى 5 ← v

3- يمكن ـ من $u \to 6 \to v$

4- ـ ـ ـ من $u \to 1 \to 5 \to 6 \to v$

5- ـ ـ ـ من $u \to 3 \to v$.

ملاحظة: كل مسار هو رحلة وكل رحلة هي مسلك لكن العكس غير صحيح.

- تسمى الرحلة أو تكون الرحلة مغلقة إذا كان $u = v$ أي إذا انطبقت البداية على النهاية.

- إذا كانت لدينا الرحلة مغلقة تسمى دورة circuit.

الدورة: u-v تسمى حلقة إذا كانت لا تحتوي على رؤوس متكررة. ونرمز لها بالرمز C_n

في حلقة C_n عدد الرؤوس يساوي n ويساوي عدد الأضلاع وبالتالي فإن الحلقة هي مسار مغلق

أما المسار هو حلقة محذوف منها ضلع

حلقة

مسار

Alamal

/ /

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:

v_1, v_3, e_1, e_3, e_4, v_0, e_2, e_5, v_2, v_4

G

ومنأخذ المسالك التالية:

$W_1 = v_0 - v_4 : v_0, v_1, v_2, v_1, v_4$

W_1 هي عبارة عن مسلك ليس رحلة لأنه الضلع e_2 متكرر

$W_2 = v_1 - v_0 : v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_0$

W_2 هي عبارة عن رحلة وليس مسار لأنه يوجد رؤوس متكررة وهو v_1.

$W_3 = v_0 - v_3 : v_0, v_1, v_4, v_3$

W_3 هي عبارة عن مسار لعدم وجود رؤوس متكررة.

المسافات في البيان: distance

ليكن البيان G ; $G(V, E)$ وليكن u, v رأسين في البيان $V(G)$

نقول عن الرأسين إنهما متصلان إذا كانت يوجد $u - v$ مسار أي

إذا وجد في البيان مسار بدايته الرأس u ونهايته الرأس v.

وما عدا ذلك فهما غير متصلان في هذه الحالة.

يكون البيان $G(V, E)$ مترابط إذا كان كل رأسين في البيان متصلين

وإلا يكون البيان غير مترابط (أي يوجد رأسين على الأقل لا يوجد مسار بينهما).

مسافة بين الرأسين u, v: هي أقصر مسار يصل بينهما ونرمز لها بالرمز

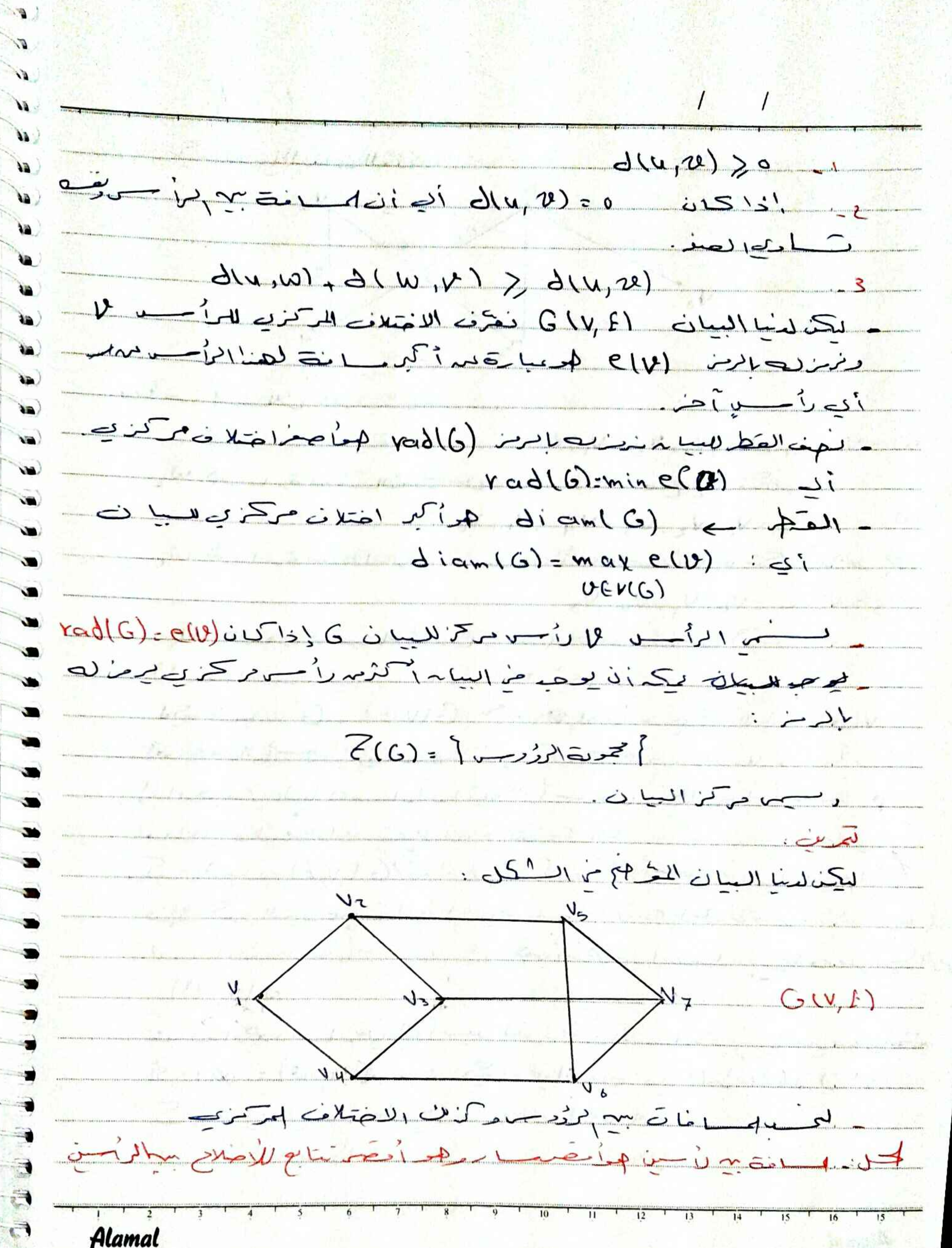
$d(u, v)$

عند عدم وجود مسار بين الرأسين نقول أن المسافة بينهما غير معرفة

أي: $d(u, v) = \infty$ وهنا يكون في البيان غير المترابط لذلك: إذا

كان البيان غير مترابط فيكون $d(u, v) = \infty$

هناك بعض الملاحظات عن المسافة $d(u, v)$:



/ /

1- $d(u,v) \geq 0$

2- إذا كان $d(u,v) = 0$ أي أن المسافة بين الرأس نفسه تساوي الصفر.

3- $d(u,w) + d(w,v) \geq d(u,v)$

- ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ نعرف الاختلاف المركزي للرأس v ونرمز له بالرمز $e(v)$ هو عبارة عن أكبر مسافة لهذا الرأس عن أي رأس آخر.
- نصف القطر للبيان نرمز له بالرمز $rad(G)$ هو أصغر اختلاف مركزي

أي $rad(G) = \min e(v)$

- القطر ← $diam(G)$ هو أكبر اختلاف مركزي للبيان

أي: $diam(G) = \max\limits_{v \in V(G)} e(v)$

- نسمي الرأس v رأس مركزي للبيان G إذا كان $rad(G) = e(v)$
- يوجد للبيان يمكن أن يوجد في البيان أكثر من رأس مركزي يرمز له بالرمز:

$Z(G) = \{$ مجموعة الرؤوس $\}$

ويسمى مركز البيان.

تمرين:

ليكن لدينا البيان الموضح في الشكل:

- لنحسب المسافات بين الرؤوس وكذلك الاختلاف المركزي

الحل: المسافة بين رأسين هو أقصر مسار وهو أقصر تتابع للأضلاع بين الرأسين

$d(v_i, v_j)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$e(v_i)$
v_1	0	1	2	1	2	2	3	3
v_2	1	0	1	2	1	2	2	2
v_3	2	1	0	1	2	2	1	2
v_4	1	2	1	0	2	1	2	2
v_5	2	1	2	2	0	1	1	2
v_6	2	2	2	1	1	0	1	2
v_7	3	2	1	2	1	1	0	3

في هذا البيان لدينا:

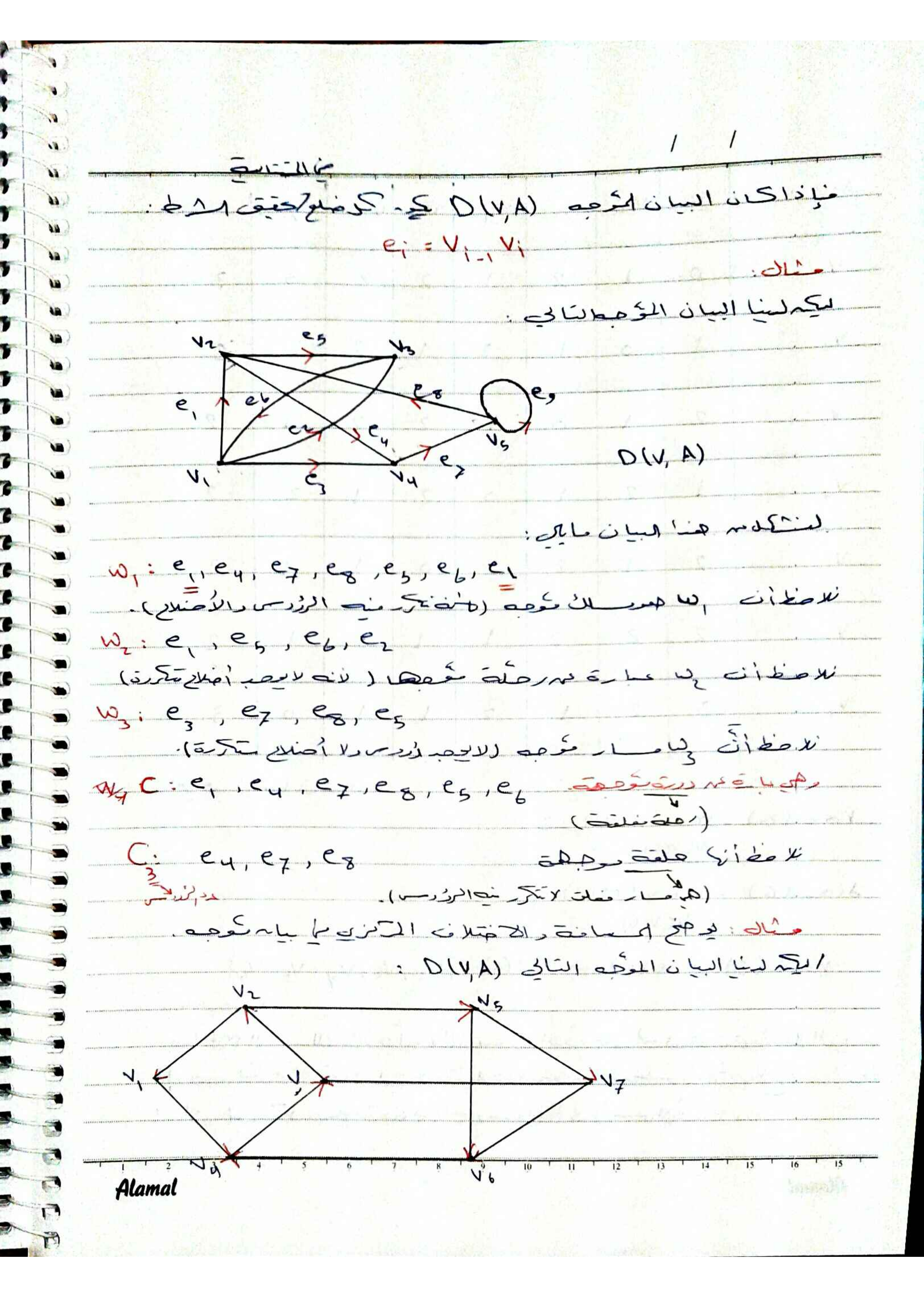
$$rad(G) = \min_{v \in V(G)} (e(v)) = 2$$

$$diam(G) = \max_{v \in V(G)} (e(v)) = 3$$

$$rad(G) = e(v) \Rightarrow Z(G) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

ملاحظة:

مفاهيم المسلك والرحلة والمسار والدورة والحلقة تنطبق على البيان الموجه بشرط أن تحقق المتتالية المتناوبة من الرؤوس والأضلاع الشرط التالي هو: كل ضلع موجه من رأس سابق إلى رأس لاحق.



في المتتابعة

فإذا كان البيان الموجه $D(V,A)$ نجد كل ضلع يحقق الشرط:

$e_i = v_{i-1}, v_i$

مثال:

ليكن لدينا البيان الموجه التالي:

لنشكل من هذا البيان ما يلي:

$W_1: e_1, e_4, e_7, e_8, e_5, e_6, e_1$

نلاحظ أن W_1 هو مسلك موجه (لأنه تكرر فيه الرؤوس والأضلاع).

$W_2: e_1, e_5, e_6, e_2$

نلاحظ أن W_2 عبارة عن رحلة موجهة (لأنه لا يوجد أضلاع متكررة)

$W_3: e_3, e_7, e_8, e_5$

نلاحظ أن W_3 مسار موجه (لا يوجد رؤوس ولا أضلاع متكررة).

W_4 $C: e_1, e_4, e_7, e_8, e_5, e_6$ وهي عبارة عن دورة موجهة (رحلة مغلقة)

$C_3: e_4, e_7, e_8$ نلاحظ أنها حلقة موجهة (هي مسار مغلق لا تتكرر فيه الرؤوس).

3 ← عدد الرؤوس

مثال: يوضح المسافة والاختلاف المركزي في بيان موجه.

ليكن لدينا البيان الموجه التالي $D(V,A)$:

- نعرف المسافة بين الرأسين u و v بأنها أقصر مسار موجه بين u و v.
ويرمز لها بـ $\vec{d}(u,v)$

- وإذا لم يوجد مسار بين الرأسين u و v نقول أن المسافة غير محددة أو غير معرفة ويكون ذلك في البيان غير المترابط أي يكون
$\vec{d}(u,v) = \infty$

- المسافة بين الرأس ونفسه تساوي الصفر.

المسار المتصل بشدة:

نقول عن البيان $D(V,A)$ أنه بيان متصل بشدة إذا كان لكل رأسين مختلفين يوجد مسار موجه من الرأس u إلى الرأس v وكذلك من v إلى u

تنويه: تعريف الاختلاف المركزي ونصف القطر والمركز كما هو في البيان غير الموجه.

لنفس الرسمة السابقة:

$\vec{d}(v_i,v_j)$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$e(v_i)$
v_1	0	3	2	1	4	5	5	5
v_2	1	0	3	2	1	2	2	3
v_3	2	1	0	3	2	3	3	3
v_4	3	2	1	0	3	4	4	4
v_5	4	3	2	2	0	1	1	4
v_6	4	3	2	1	4	0	5	5
v_7	3	2	1	2	3	1	0	3

نلاحظ أن:

$rad(D) = 3$

$diam(D) = 5$

$Z(D) = \{v_2, v_3, v_7\}$